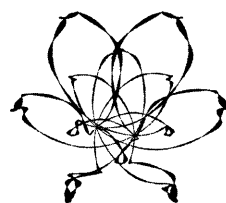


統計力学と関数論とブラウン運動と



香取 眞理

■ 1. 揺らぎを厳密に表現するための研究 ■

大学の物理学科に入学あるいは進学すると、まずは高校でも習った力学と電磁気学を勉強し直す。その後、量子力学と統計力学の講義を受けることになる。この2つを比較すると、習い始めたとき、量子力学のほうが断然興味深く思えるのではないだろうか。ハイゼンベルクの不確定性原理だとか、シュレーディンガーの猫だとか、用語が魅力的だし、なんといっても「高校で習ったニュートン力学は実は正しい理論ではなく、量子力学の近似に過ぎない」というような言い回しは挑発的である。もちろん、統計力学は熱力学や流体力学といったマクロで連続的な現象と原子や分子といったミクロで離散的な実体とを結びつける画期的な理論である。習いたてのときにその価値が分からないのは、単に力学や電磁気学に比べて熱力学や流体力学を高校で教わっていないために過ぎない。

しかし、量子力学のほうにより惹かれる理由は別にもあるように思う。量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式はニュートンの運動方程式よりも難しい。例えば、1次元調和振動子を考えた場合、ニュートン力学なら答えは高校の数学でも習った三角関数で表せる。しかし、量子力学ではエルミート関数という特殊関数が必要で、普通これは大学に入って初めて知ることになる。「量子力学という新しい物理を記述するには、特殊関数論という特別な数学をマスターしなければ

ならない」と、これまた挑発的なことを先生はおっしゃる。とかく若いときには、難しいことに挑戦したがるものである。

特殊関数論は関数論の一部である。私は数学科でどのように講義がなされているか良く知らないが、関数論には一般論と特論とがあり、特殊関数は後者の分類に入っているのであろう。物理数学の講義では、関数論の一般論として複素関数の話をする。解析性とコーシー・リーマン条件、実部関数と虚部関数の調和性、共形変換など話題に事欠かないし、留数定理を使った積分計算には楽しい演習問題が多い。しかし、これもまた統計力学に対する量子力学の優位性に加担する。波動関数は複素関数であるからである。他方、統計力学の確率分布は実関数であり、その計算は実解析である確率論をベースにする。

しかし、一たび統計力学を勉強し、卒研や大学院で研究生活を始めるようになると、上述のような最初の印象は単なる思い違いであったことを知ることになる。2次元イジング模型のオンサーガー解に代表される統計力学模型の厳密解の研究は、複素関数論、特に楕円関数論の研究といってもよい。量子力学は相対論の要請に基づき量子場の理論となるわけだが、そこで議論される実体は、統計力学的な物理量（分配関数や相関関数）と同一視される。

量子力学（量子場の理論）も統計力学も、結局のところは等しく、揺らぎを表現し制御しようと

するための学問なのだと思う。量子力学では、揺らぎは不確定性に由来する根源的なものであり、しばしば代数の非可換性をもって表現される。一方、膨大な数の粒子を取り扱おうとする統計力学では、粗視化操作の過程で副次的と見なされた自由度を表すものとして揺らぎが導入され、もっぱら確率変数として表現される。同じく揺らぎを対象にしているのにもかかわらず、理論構成が著しく異なっており、これが冒頭に述べたような初学者の誤解を生むのであろう。別の言い方をすれば、「揺らぎ」というものは深いものに通じる何かなのである。

数理物理の分野では、この10年ほどの間に、揺らぎを厳密に表現する試みが著しい進歩を遂げている。そこにおいては、量子場の理論（共形場理論）と統計力学（確率論）とともに、関数論が重要な役割を果たしている。本稿ではその様子を、ある一つの「もの」を中心にして解説を試みる。その「もの」とはブラウン運動である。

■ 2. ブラウン運動を用いた空間次元の連続化 ■

1次元標準ブラウン運動を B_t と書くことにする。これは、直線（1次元実空間 \mathbb{R} ）上をランダムに運動する「ブラウン粒子」の時刻 $t \geq 0$ での位置を表す確率変数である。まず、 $t = 0$ での初期位置を与える： $B_0 = x \in \mathbb{R}$ 。2時刻 $0 < s < t$ に対して、時間間隔 $t - s$ におけるブラウン粒子の変位は $B_t - B_s$ ということになるが、この分布は時刻 s 以前の運動と独立であり、任意の $a < b$ に対して

$$\mathbf{P}(B_t - B_s \in [a, b]) = \int_a^b p_{t-s}(x) dx,$$

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \quad (1)$$

で与えられる。 $p_t(x)$ は平均零、分散 $\sigma^2 = t$ のガウス分布の確率密度であるが、ここでは時間 t の間の幅 x の推移の確率密度を指定することから、推移確率密度とよぶ。ブラウン運動 B_t は、上記の性質をもち、かつ、確率1で時刻 t の連続関数であるものとして定義される。

さて、 $D = 2, 3, 4, \dots$ として D 個の独立なブラウン運動を用意して、それらを $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^D$ と書くことにする。 D 次元ブラウン運動は、 $\mathbf{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^D), t \geq 0$ で定義される。これが、 D 次元実空間の中をランダムに浮遊するブラウン粒子の時刻 t での位置ベクトルを与えるというわけである。初期位置を $\mathbf{B}_0 = \mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^D) \in \mathbb{R}^D$ とすると、これは原点から距離 $|\mathbf{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^D)^2}$ のところにある。それでは、時刻 $t > 0$ でのブラウン粒子は原点からどれだけ離れた点にいるのだろうか。これは、 \mathbf{B}_t の動径成分として定義される

$$X_t = |\mathbf{B}_t| = \sqrt{(B_t^1)^2 + \dots + (B_t^D)^2} \quad (2)$$

という確率過程の挙動を調べる問題である。

伊藤の公式¹⁾によって計算すると、 X_t の従う確率微分方程式は

$$dX_t = dB_t + \frac{D-1}{2} \frac{1}{X_t} dt, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

であることが導かれる。ここで、右辺第1項の B_t は、上の $B_t^j, 1 \leq j \leq D$ とは独立な1次元標準ブラウン運動である。この X_t が時間 $t > 0$ の間に $x \geq 0$ から $y \geq 0$ に変化する推移確率密度を $p_t^D(y|x)$ と書くことにすると、これは偏微分方程式

$$\frac{\partial p_t^D(y|x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_t^D(y|x)}{\partial x^2} + \frac{D-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial p_t^D(y|x)}{\partial x} \quad (4)$$

の初期条件 $p_0^D(y|x) = \delta(y-x)$ の下での解で与えられる。(3)式から(4)式への移行は見て明らかであろう。ブラウン運動の項 dB_t が2階微分の拡散項に、 dt に比例した有界変動項は勾配 $\partial/\partial x$ に比例したドリフト項になっている¹⁾。この解は、変形ベッセル関数

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \quad (5)$$

を用いて ($\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$ はガンマ関数),

$$p_t^D(y|x) = \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2t}}{t} I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \quad (6)$$

で与えられる。ただし、助変数 ν は

$$\nu = \frac{D-2}{2} \quad (7)$$

とおく。ここで $I_\nu(z)$ という特殊関数が登場したわけであるが、一つ関数論的な知識を使うことにする。それは $I_\nu(z)$ は助変数 ν に関して解析的であるということである。つまり、(6) 式で与えられた $p_t^D(y|x)$ は任意の複素数 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して意味を持つ。ここに、(7) 式を D について解いて

$$D = 2(\nu + 1) \quad (8)$$

として、本来は $D = 1, 2, 3, \dots$ と離散的だった次元 D を (複素) 連続変数に拡張して考えるというアイデアが生まれる。本稿では、次元は実数であるとして、特に $D \geq 1$ 、すなわち $\nu \geq -1/2$ の場合を考えることにする。そして、(6) 式を推移確率密度とする 1 次元確率過程 X_t を D 次元ベッセル過程とよぶ。空間次元 D を 1 以上の実数に拡張し、その空間でのブラウン粒子の原点からの距離が X_t で与えられるものとするのである ($D = 1$ のときは、元の 1 次元ブラウン運動 B_t ではなく、 $X_t = |B_t|$ である。「1 次元ベクトル」 $x \in \mathbb{R}$ の「動径成分」はその絶対値 $|x| \geq 0$ で与えるので良いだろう)。

原点から距離 x の点からスタートした D 次元ブラウン運動が初めて原点に到達する時刻を T_x と書くことにすると、これは x からスタートした D 次元ベッセル過程 X_t^x を用いて $T_x = \inf\{t > 0 : X_t^x = 0\}$ で与えられる。任意の $x > 0$ に対して、 $D \geq 2$ のとき $T_x = \infty$ であり、 $D < 2$ のとき $T_x < \infty$ であることが証明できる。これを $D > 2$ のときは推移的であり、 $D < 2$ のときは再帰的であるという。 $D = 2$ のときは $T_x = \infty$ であるが、 $\inf_{t>0} X_t^x = 0$ であり、原点の任意の近傍に戻ってくる (だから、酔歩の私も自宅にたどり着くことができるのだらう)。このことは、ブラウン運動の軌跡 $B_{[0,\infty)}$ のフラクタル次元が 2 であることに依るので、容器であるところの空間次元 D を連続にしても話は変わらない。

一般に次元 D が低くなって 1 に近くなるほど、

ブラウン運動は原点に戻りやすくなる。(3) 式 (あるいは (4) 式) の第 2 項の因子 $1/X_t$ (因子 $1/x$) は $X_t \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) で正に発散するものであり原点からの斥力効果を表しているのだが、その係数が $(D-1)/2$ だからである。その傾向は、上述のように $D_c = 2$ で定性的に変化するのであるが、実はもう一つ臨界的な次元がある。それは $D_c^* = 3/2$ 次元である²⁾。

$0 < x < y$ として、 x からスタートした D 次元ベッセル過程 X_t^x と y からスタートした X_t^y の挙動を比較する。ただし、ともに全く同じブラウン運動 B_t で駆動させた確率微分方程式 (3) でプロセスを生成させることにする。次元が十分に低くて $1 \leq D \leq D_c^*$ のときには、原点近くからスタートした粒子ほど原点に早く戻ってくる。つまり、確率 1 で $T_x < T_y$ が成り立つ。しかし、次元が $D_c^* < D < 2$ だと、 X_t^x は再帰的ではあるが、原点に戻ってこようとする傾向が弱いので、最後にもたついてしまう。その結果、遠くからスタートした X_t^y と同着になってしまうことがあり得るのである。つまり、確率 $\mathbf{P}(T_x = T_y) > 0$ なのである (設定から $T_x > T_y$ はあり得ない)。強調すべきことは、この確率がガウスの超幾何級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n z^n}{(\gamma)_n n!} \quad (9)$$

(ただし、 $(c)_n = c(c+1)\cdots(c+n-1)$) を使って書けるということである²⁾：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_x = T_y) &= 1 - \frac{\Gamma(D-1)}{\Gamma(2(D-1))\Gamma(2-D)} \\ &\times F\left(2D-3, D-1, 2(D-1); \frac{y-x}{y}\right) \\ &\times \left(\frac{y-x}{y}\right)^{2D-3}, \quad D_c^* < D < D_c \quad (10) \end{aligned}$$

「1.5 次元以上 2 次元未満の中途半端な次元の空間の中を運動するブラウン粒子が原点近くでどれだけでもたつのか」という微妙な揺らぎの振舞いが特殊関数で正確に表せた。このことは、この揺らぎが実体をもつことを示唆する。実際、次節で述べるシュラム・レヴナー発展の理論において、

(10) 式は 2 次元パーコレーション模型で重要な物理量を与えるカーディエーの公式 (の拡張) と等価であることが明らかになるのである²⁾.

3. 複素化がもたらす揺らぎの統一理論

(SLE)

前節の後半で X_t^x という記法を用いた. これは, 初期時刻 $t = 0$ で初期値 $x > 0$ からスタートした D 次元ベッセル過程の時刻 t での値を表す. (1) 式, すなわちブラウン運動 B_t の推移確率密度が分散 t のガウス分布関数であることから, 時間 t の間のブラウン粒子の移動距離は \sqrt{t} に比例することが分かる. 時間 t に対して空間的な広がり \sqrt{t} である現象を一般に拡散現象という. ブラウン運動は典型的な拡散過程であり, $\kappa > 0$ としたとき, その定義から $B_{\kappa t}$ の分布 (つまり, 時刻 t をその κ 倍の時刻 κt に時間変更したときの空間的な広がりの分布) は, B_t の $\sqrt{\kappa}$ 倍 (つまり $\sqrt{\kappa}B_t$) の分布に等しいことになる. これをブラウン運動スケールリングという. $p_t(x)$ が偶関数であることから, $-B_t$ の分布と B_t の分布は等しいことも明らかである. 以上の考察から, $\widehat{X}_t^x \equiv \sqrt{\kappa}X_t^x + B_{\kappa t}$ として, 特に

$$\kappa = \frac{4}{D-1} \quad (11)$$

とおくと, D 次元ベッセル過程の確率微分方程式 (3) は, 確率過程 $B_{\kappa t}$ を含む常微分方程式

$$\frac{d\widehat{X}_t^x}{dt} = \frac{2}{\widehat{X}_t^x - B_{\kappa t}} \quad (12)$$

に変換されることが分かる.

さてここで, $i = \sqrt{-1}$ として, $x \rightarrow z = x + iy$, $\widehat{X}_t^x \rightarrow g_t(z) = \widehat{X}_t^x + i\widehat{Y}_t^x$ というように, 変数の複素化を行うことにする. ただし, ブラウン運動はそのまま (実数のまま) に据え置く. すると,

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t} \quad (13)$$

という形の方程式が得られる. ただし, $U_t = B_{\kappa t}$ である.

複素上半面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ と書く. $z \in \mathbb{H}$ として, (13) 式の時刻 t での解 $g_t(z)$ が存在すると仮定する. すると, ブラウン運動を実数に据え置いたことから, 必ず $g_t(z) \in \mathbb{H}$ であることになる. 複素化ベッセル過程としては, z は初期値であり, その各値に対して時刻 t での値を与えるものとして $g_t(z)$ を考えるのが自然である. しかし, ここでは一歩進めて, g_t を \mathbb{H} 内の単連結部分領域 $H_t \subset \mathbb{H}$ から \mathbb{H} への写像と見なすことにする (H_t は時刻 t で解 $g_t(z)$ が存在するような z 全体の集合). 複素関数論の単葉関数に対するレヴナーの理論によると, 方程式 (13) の形から, 解 g_t は共形写像であることが分かる. 駆動関数として実関数 $\{U_t : t \geq 0\}$ が与えられると, $g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ という初期条件の下で (13) 式を解くことにより, 共形写像の時間発展系 $\{g_t(z) : t \geq 0\}$ が得られるのである. (13) 式をレヴナー方程式という.

我々がベッセル過程を複素化することによって得たレヴナー方程式では, 駆動関数はブラウン運動の時間変更 ($t \rightarrow \kappa t$) $U_t = B_{\kappa t}$ である. この揺らぎを伴ったレヴナー方程式は, 2000 年にシュラムによって初めて議論された³⁾. 今日では, $U_t = B_{\kappa t}$ の下での方程式 (13), およびその解として得られる共形写像のランダムな時間発展系はシュラム・レヴナー発展 (Schramm-Loewner evolution), 略して SLE とよばれている^{4,5)}.

SLE (13) の定義域は H_t の境界まで拡張できる. H_t の境界は g_t によって \mathbb{H} の境界である実軸 \mathbb{R} に写される. g_t は 1 対 1 写像であり, $B_{\kappa t} \in \mathbb{R}$ なので,

$$\gamma_t = g_t^{-1}(B_{\kappa t}), \quad t \geq 0 \quad (14)$$

が定義される. γ_t が \mathbb{H} 上に確率 1 で連続曲線を描くことが証明できる. 駆動関数であるブラウン運動の時間変更パラメータ κ を指定したときの曲線 $\gamma_{[0, \infty)}$ を SLE $_{\kappa}$ 曲線とよび, その確率測度を \mathbb{P}_{κ} と書くことにする. 共形不変性と領域マルコフ性という 2 つの性質をもつ \mathbb{H} 上の連続曲線の測度は一般に $\mathbb{P}_{\kappa}, \kappa > 0$ で与えられることが証明された²⁾. ヴェルナーは (シュラムとローラーと

共に行った) この業績が高く評価され、2006年に数学のノーベル賞とも称されるフィールズ賞を受賞した。

(11)式によって、 $D_c = 2$ と $D_c^* = 3/2$ に対応して κ の2つの臨界値が $\kappa_c = 4, \kappa_c^* = 8$ と定まる。 $0 < \kappa \leq \kappa_c$ のとき SLE_κ は単純曲線であり、フラクタル物理で研究されてきた平面格子上のランダムな経路の連続極限を記述する。実際、ループ除去ランダムウォーク (loop-erased random walk) の連続極限は $P_{\kappa=2}$ であることは証明され、自己回避ウォーク (self-avoiding walk) の連続極限は $P_{\kappa=8/3}$ であることが予想されている。 $\kappa_c < \kappa < \kappa_c^*$ のとき SLE_κ 曲線は自分自身と接して面上にループを織りなす複雑なものとなる。これらは2次相転移を起こす平面上の熱平衡統計力学模型に現れるランダム曲線が、臨界点 (相転移点) において従う確率法則を実現する。スミルノフは臨界パーコレーション探索過程の連続極限の測度が $P_{\kappa=6}$ であり、(フォーチュン・カステライン的) 臨界イジング界面の連続極限の測度が $P_{\kappa=16/3}$ であることを証明し、2010年にフィールズ賞を受賞した。 $\kappa \geq 8$ のとき SLE_κ 曲線は稠密となり面上を埋め尽くす。特に $P_{\kappa=8}$ は砂山崩し模型や森林火災模型といった自己組織化臨界現象⁶⁾の模型で研究されている一様全域木 (uniform spanning tree) ペアノ曲線の連続極限測度を与える。

シュラムが見出した SLE は、フラクタル、相転移、自己組織化臨界現象といった統計力学の研究分野における分類を超えた、いわば、平面上の連続曲線の (臨界的な) 揺らぎの統一理論といえる*1)。 SLE (13) を駆動している $U_t = B_{\kappa t}$ をたった1つのブラウン運動 (の時間変更) と見るべきなのか、それとも $D = 4/\kappa + 1$ 次元のブラウン運動と見るべきなのだろうか。境界共形場理論との対比より、SLEのパラメータ κ とセントラル・チャージ (中心元) c とは

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} \quad (15)$$

*1) シュラムは2008年に登山中の事故で亡くなった。46歳だった。

で結ばれることが分かる^{4,5)}。ビラソロ代数は $D = (25 - c \pm \sqrt{c^2 - 26c + 25})/12$ 次元のブラウン運動の揺らぎを表現しているということか。

■ 4. ランダム行列理論が示す多変数化の道 ■

D 次元ブラウン運動 B_t は、 $D = 2, 3, 4, \dots$ のときには、「 D 次元ベクトル値ブラウン運動」であるということが出来る。その拡張として、「行列値ブラウン運動」 M_t を考えたい。特に $N \times N$ のエルミート行列に値をとる場合を考えることにすると、それには N^2 個の独立な1次元ブラウン運動を用意すればよい。行列値の乱数の統計理論をランダム行列理論という。我々はその確率過程バージョンを研究している^{7,8)}。

ベクトル値ブラウン運動 B_t の動径成分 $|B_t|$ がベッセル過程であった。 $N \times N$ エルミート行列値ブラウン運動 M_t の動径成分に相当する量は N 個の実固有値 $\Lambda_t = (\Lambda_t^1, \Lambda_t^2, \dots, \Lambda_t^N)$ である。この固有値確率過程 Λ_t はダイソン模型とよばれている。配置空間は A 型ワイル領域 $\mathbb{W}_N = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^N) : x^1 < x^2 < \dots < x^N\}$ であり、配置 $\mu \in \mathbb{W}_N$ から配置 $\lambda \in \mathbb{W}_N$ への時間 t の間の推移確率密度は

$$p_t^N(\lambda|\mu) = \frac{h(\lambda)}{h(\mu)} \det_{1 \leq j, k \leq N} [p_t(\lambda^j - \mu^k)] \quad (16)$$

で与えられる。ただし、

$$h(x) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x^k - x^j) \quad (17)$$

であり、 p_t は (1) 式で与えたものである。

N 変数 $\Lambda_t^1 = \lambda^1, \dots, \Lambda_t^N = \lambda^N$ を1次元上の N 粒子の位置と見なすことにする。 $N = 2$ とすれば2粒子系となり、(16)式は配置 (μ^1, μ^2) から配置 (λ^1, λ^2) への推移確率密度を表す。そこで、2粒子系に対する常套手段として、重心座標と相対座標を導入する：

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^1 + \mu^2}{2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda^1 + \lambda^2}{2}, \\ \Delta\mu = \frac{\mu^2 - \mu^1}{\sqrt{2}}, \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{\sqrt{2}} \quad (18)$$

すると, (16) 式は

$$p_t^{N=2}(\lambda|\mu) = p_t(\bar{\lambda}-\bar{\mu}) \times p_t^{D=3}(\Delta\lambda|\Delta\mu) \quad (19)$$

と積に分解できることが分かる. ここで, $p_t^{D=3}$ は (6) 式で $D=3$ としたものである. 関係式 (7) より, $D=3 \iff \nu=1/2$ であることと, 変形ベッセル関数の公式 $I_{1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \sinh z$ を用いた. 重心は 1 次元ブラウン運動をし, 相対座標は 3 次元ベッセル過程として運動するのである. つまり, ダイソン模型は 3 次元ベッセル過程を多変数拡張したものと考えられることになる. (16) 式に現れる行列式はカーリン・マクグリーガー行列式とよばれるものであり, 衝突したら対消滅してしまう (vicious) ブラウン粒子系を表す⁹⁾. その前の因子 $h(\lambda)/h(\mu)$ により再規格化がされ, 非衝突条件の下での確率過程に変換されている. この変換は, 関数論でいう調和変換である.

行列式を積表示するというクラッテンターラーの流儀を逆行して, 調和変換を行列式

$$\frac{h(\lambda)}{h(\mu)} = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\Phi_{\mu}^{\mu^j}(\lambda^k) \right] \quad (20)$$

に書き換えると,

$$\Phi_{\mu}^{\mu^j}(z) = \prod_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \neq j}} \frac{z - \mu^n}{\mu^j - \mu^n}, \quad j \geq 1 \quad (21)$$

という関数を得る. これは z の $N-1$ 次多項式であり, $\{\mu^n : 1 \leq n \leq N, n \neq j\}$ に零点をもつ正則関数である. そこで, 複素ブラウン運動

$$B_t^j = B_t^j + i\tilde{B}_t^j, \quad j \geq 1 \quad (22)$$

を導入して (B_t^j, \tilde{B}_t^j) は独立な 1 次元ブラウン運動, $\Phi_{\mu}^{\mu^j}(B_t^k), j, k \geq 1$ を考えることにする. これは複素ブラウン運動の共形変換になっている.ところが, 複素ブラウン運動の確率測度は共形不変性を持っているので, $\Phi_{\mu}^{\mu^j}(B_t^k)$ もまた複素ブラウン運動 (の時間変更) なのである. ブラウン運動とは揺らぎなので, 平均値は時間に依らず一定である. この性質をもつ $\Phi_{\mu}^{\mu^j}(B_t^k)$ を共形マルチンゲールという.

以上の考察から次の事実が導かれる¹⁰⁾. ダイソ

ン模型において, 自由度 $f(\leq N)$ の観測量を求めたいとする. それには, f 個の互いに独立な複素ブラウン運動を用意して, それらの経路に行列式共変マルチンゲール $\det_{1 \leq j, k \leq f} [\Phi_{\mu}^{\mu^j}(B_t^k)]$ の重みを課した系を考えて, 対応する観測量を計算すればよい (これが行列式過程⁷⁾の本質である).

(21) 式で $N \rightarrow \infty$ とすると無限乗積が得られるが, それをワイヤシュトラスの標準積と見ると整関数が定義されることになる. したがって, $N = \infty$ においても共形マルチンゲール $\Phi_{\mu}^{\mu^j}(B_t^k)$ は well-defined であり, 任意の観測量はその自由度と等しい個数の複素ブラウン運動からなる有限系の挙動で定まる. これでダイソン模型の無限粒子極限が構成されたことになる^{10, 11)}. ダイソン模型は長距離斥力相互作用をもつ対数ガスであり, 統計力学の標準的な手法であるルエールの議論ではこれまで無限粒子系を構成することは不可能であった⁸⁾.

本稿のタイトルが示唆する「分野超越的な研究」は, 現在ますます深まっている. その証拠として, 最後に 2 つの論文をあげておくことにする. 1 つ目¹²⁾ は SLE を多重連結領域に拡張する試みであり, 2 つ目¹³⁾ はランダム行列理論の幾何的リフトおよび (q, t) -拡張を提案するものである.

参考文献

- 1) 伊藤清 企画・監修, 渡辺信三, 重川一郎 編:『確率論ハンドブック』, 丸善出版 (2012).
- 2) G.F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Amer. Math. Soc. (2005).
- 3) O. Schramm: *Israel J. Math.* **118**, 221–288 (2000).
- 4) 香取眞理: 日本物理学会誌 **62**, no.7, 527–531 (2007).
- 5) 白井朋之, 香取眞理: 文献 1) の 11.4 SLE.
- 6) 香取眞理: 日本物理学会誌 **55**, no.4, 276–280 (2000).
- 7) 香取眞理, 種村秀紀: 数学 **61**, no.3, 225–247 (2009); *Sugaku Expositions* (AMS) **24**, 263–289 (2011).
- 8) 長田博文: 文献 1) の 11.5 ランダム行列.
- 9) 香取眞理: 応用数理 **13**, no.4, 16–27 (2003).
- 10) M. Katori, H. Tanemura: *Electron. Commun. Probab.* **18**, no.4, 1–16 (2013).
- 11) M. Katori, H. Tanemura: *Commun. Math. Phys.* **293**, 469–497 (2010).
- 12) R.O. Bauer, R.M. Friedrich: *Math. Z.* **258**, 241–265 (2008).
- 13) A. Borodin, I. Corwin: arXiv:math.PR/1111.4408.

(かとり・まこと, 中央大学理工学部)